Modelování a experimentální zjišťování mechanických vlastností nelineárních materiálů

Biomechanika a lékařské přístroje

Projekt II Lukáš Horný

Laboratoř biomechaniky člověka
Ústavu mechaniky Fakulty strojní
ČVUT v Praze

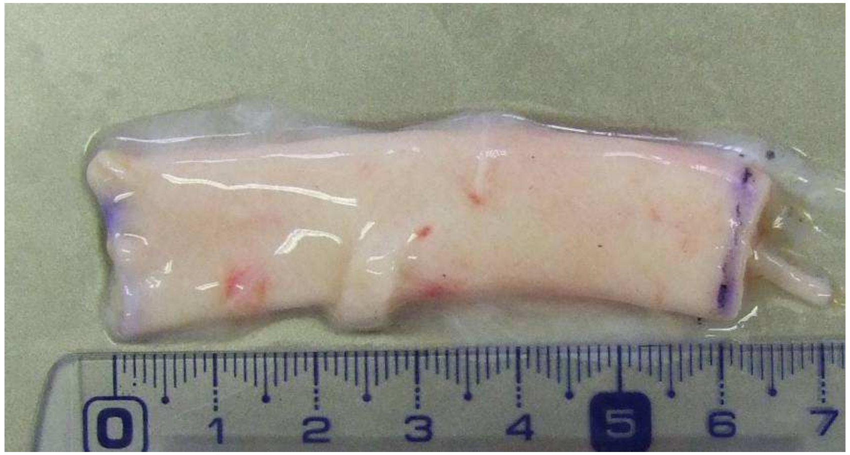
Cvičná úloha

Axiální mechanická odezva břišní aorty

V laboratoři byl proveden experiment, kdy jsme zjišťovali odezvu vzorku břišní aorty na podélné zatížení. Cílem je stanovit konstitutivní model pro tuto odezvu.

Experiment

- Vzorek

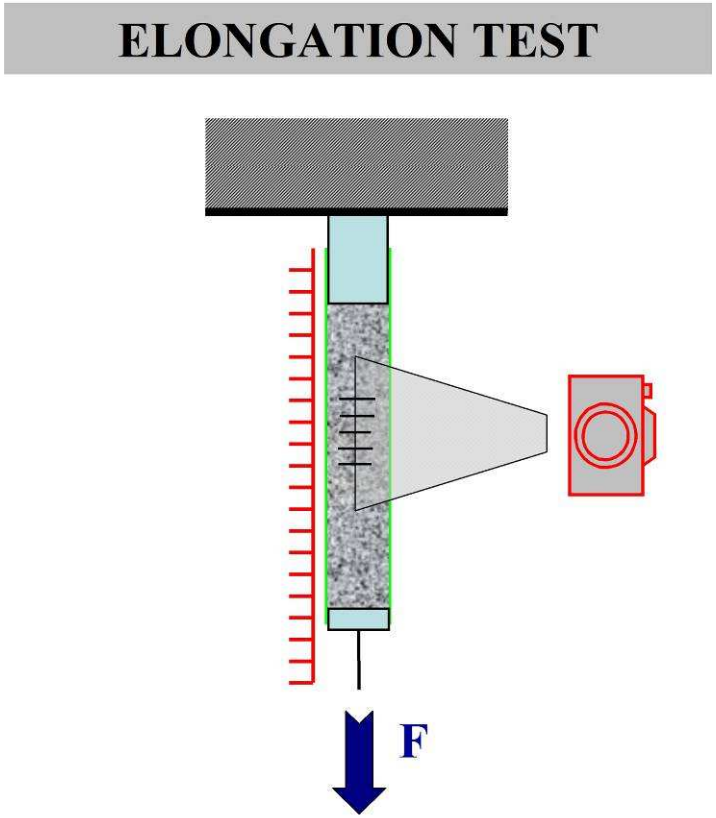


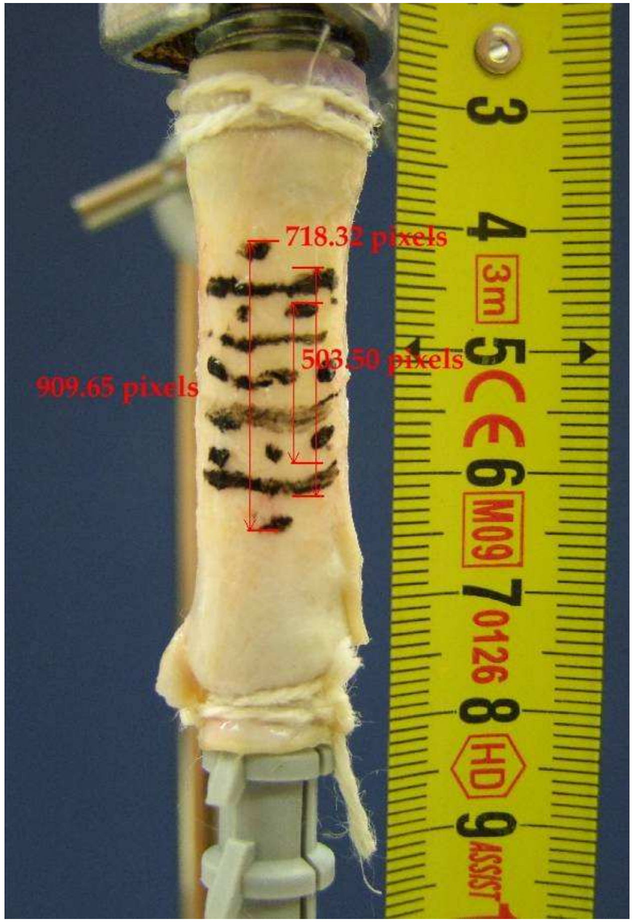
žena, 20-30 let, 90h post mortem
bez patologických změn

měřením byly zjištěny tyto rozměry
obvod: 35.94; 34.22; 37.86 mm
tloušťka stěny: 0.96 (opticky); 1.45; 1.41 mm (posuvkou)

Experiment

- Tahová zkouška





Experiment

- Vektory zjištěných dat

λ [–]	λ SD	F [N]
1.000	0.000	0.000
1.077	0.017	0.132
1.123	0.018	0.236
1.174	0.012	0.338
1.204	0.009	0.442
1.229	0.009	0.545
1.240	0.011	0.650
1.259	0.016	0.753
1.270	0.012	0.855
1.281	0.007	0.960
1.288	0.007	1.175
1.302	0.006	1.385
1.314	0.010	1.594
1.330	0.003	1.812

Výpočtový model

- Deformace

Tepna se zatížením protahovala, jak se choval poloměr?

(1) Pro vysoký obsah vody, bývají měkké tkáně často modelovány jako „**nestlačitelné**“.

(2) Ačkoliv jsou cévy obecně anisotropní, modelujme ji dnes jako **isotropní** protože:
hlavním zdrojem anisotropie jsou kolagenní vlákna, která jsou (2a) vysoce zvlněná
(2b) orientovány především obvodově.

(3) **Zkosy zanedbejme**.

Výpočtový model

- Deformace

Ve válcovém souřadném systému z toho plyne

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_{rR} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\vartheta\Theta} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zZ} \end{pmatrix}$$

0 *zkosy*

$$\mathit{deformace}: \begin{matrix} R \rightarrow r \\ \Theta \rightarrow \vartheta \\ Z \rightarrow z \end{matrix}$$

$$r = \lambda_{\vartheta\Theta} R$$
$$\vartheta = \Theta$$
$$z = \lambda_{zZ} Z$$

$$h = \lambda_{rR} H$$

Isotropie

$$\lambda_{rR} = \lambda_{\vartheta\Theta}$$

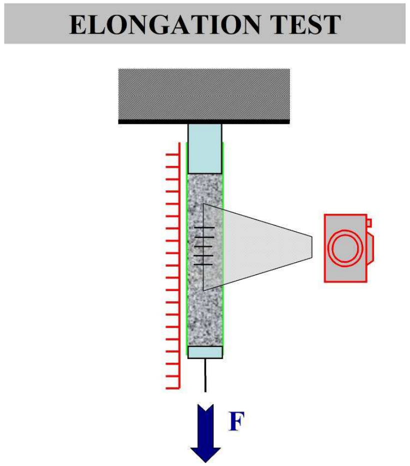
Nestlačitelnost

$$\lambda_{rR}\lambda_{\vartheta\Theta}\lambda_{zZ} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\vartheta\Theta} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{zZ}}}$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{zZ}}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_{zZ}}} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{Z} \end{pmatrix}$$

Výpočtový model

- Pozorované napětí σ^{EXP}



Napjatost modelujeme jako jednoosou

$$P_{zZ} = \frac{f}{A} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{zz} = \frac{f}{a} = \frac{f}{oh}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{f}{oh} = \frac{f}{\lambda_{\vartheta\Theta} O \lambda_{rR} H} = \frac{1}{\lambda_{\vartheta\Theta}\lambda_{rR}} \frac{f}{A} = \lambda_{zZ} \frac{f}{A}$$

$$\sigma_{zz}^{EXP} = \lambda_{zZ} \frac{f}{A}$$

Výpočtový model

- Modelová odezva napětí σ^{MOD}

Hyperelastický materiál

Gentův model hustoty deformační energie

$$W = -\frac{\mu J_m}{2}\mathbf{ln}\left(1-\frac{I_1-3}{J_m}\right)$$

$$I_1 = \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2 = \lambda_{rR}^2+\lambda_{\vartheta\Theta}^2+\lambda_{zZ}^2$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} - p\mathbf{I}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\vartheta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\vartheta} & \sigma_{\vartheta\vartheta} & \sigma_{z\vartheta} \\ \sigma_{rz} & \sigma_{z\vartheta} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\vartheta\Theta}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{rR} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\vartheta\Theta} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zZ} \end{pmatrix} - p\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Výpočtový model

- Modelová odezva napětí σ^{MOD}

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\vartheta\vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{rR}\dfrac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}} - p & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\vartheta\Theta}\dfrac{\partial W}{\partial \lambda_{\vartheta\Theta}} - p & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zZ}\dfrac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}} - p \end{pmatrix}$$

Určení p

Zformulujte nějakou silovou okrajovou podmínku.

Např.: Naše protahovaná céva byla zatížena nulovým transmurálním tlakem.

$$\text{Čili } \sigma_{rr} = 0$$

$$\lambda_{rR}\frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}} - p = 0$$

Výpočtový model

- Modelová odezva napětí σ^{MOD}

Nyní dosaďme z kinematických podmínek a je hotovo.

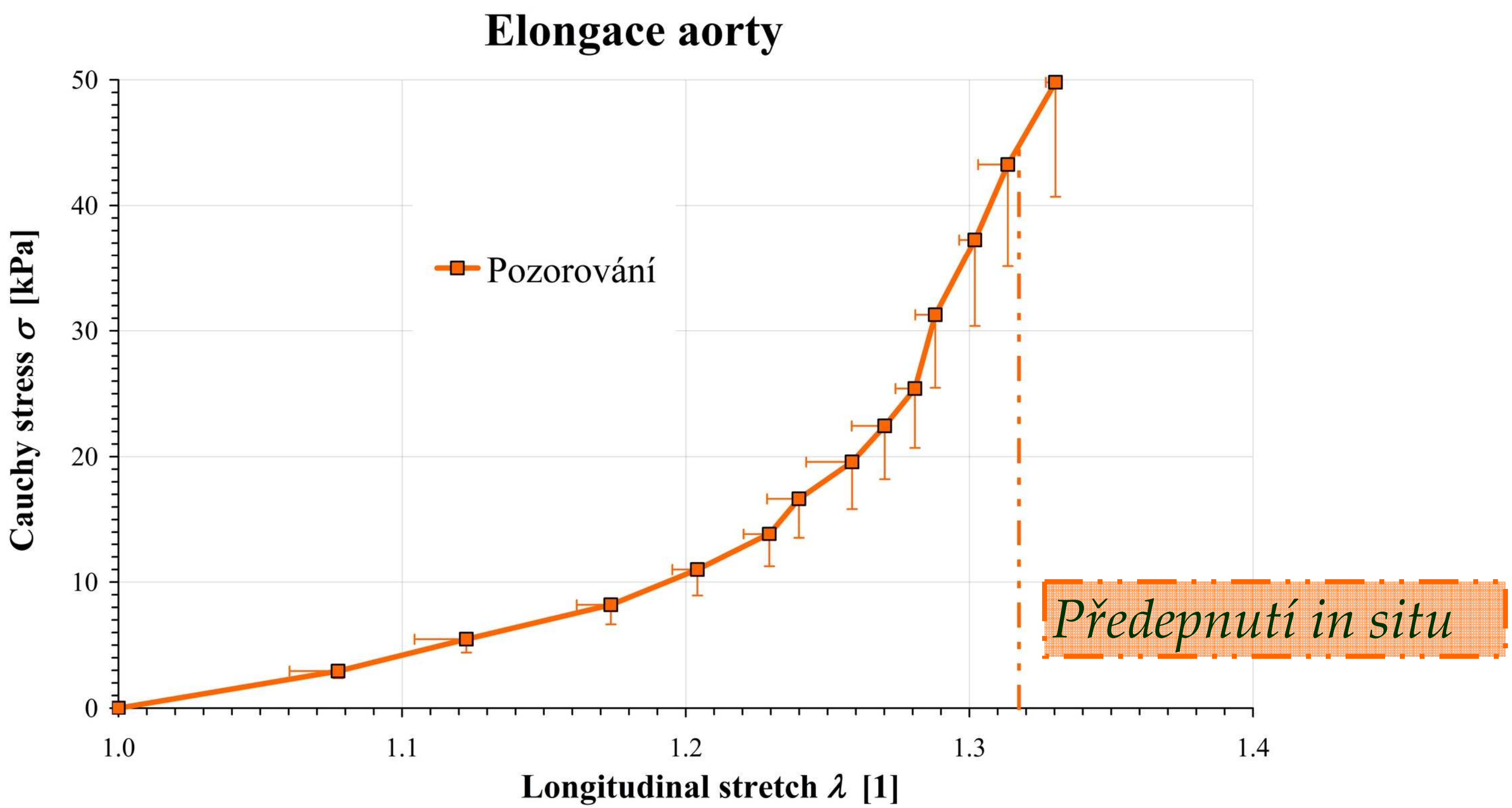
$$\lambda_{rR} = \lambda_{\vartheta\Theta} \quad \lambda_{rR}\lambda_{\vartheta\Theta}\lambda_{zZ} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\vartheta\Theta} = \lambda_{rR} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{zZ}}}$$

$$\sigma_{zz}^{MOD} = ?$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\mu J_m \left(\lambda_{zZ}^2 - \dfrac{1}{\lambda_{zZ}} \right)}{J_m - \left(\lambda_{zZ}^2 + \dfrac{2}{\lambda_{zZ}} - 3 \right)}$$

Vyrovnání naměřených dat

- Jak z pozorování odhadneme μ a J_m?



Vyrovnání naměřených dat

- Vyrovnání pozorování modelem – regresní analýza

Nejčastější způsob odhadu neznámých parametrů je pomocí *metody nejmenších čtverců*.

Postup je takový, že *optimalizujeme* účelovou funkci Q (součet čtverců odchylek modelu a pozorování) tak, abychom získali odhady neznámých parametrů, které minimalizují Q.

Ve světě, kde neexistují *chyby měření* a *podmínky experimentu jsou dokonale kontrolovány*, bychom v případě dokonalého modelu dospěli ke $Q = 0$.

$$Q(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \sum_{i=1}^{n} \left(f_i^{EXP} - f_i^{MOD}(a_1, a_2, \ldots, a_k) \right)^2$$

Vyrovnání naměřených dat

- Vyrovnání pozorování modelem – regresní analýza

Často zavádíme váhové koeficienty w

$$Q(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)=\sum_{i=1}^{n} w_i\left(f_i^{EXP}-f_i^{MOD}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)\right)^2$$

Důvodem bývá buď to, že některá pozorování jsou jistější než jiná (jistějším přiřadíme vyšší váhu), nebo skutečnost, že účelová funkce obsahuje veličiny nestejných řádů či fyzikálních rozměrů. V takovém případě slouží váhy k *normalizaci* problému.

Vyrovnání naměřených dat

- Minimum Q můžeme hledat jakkoliv…

třeba metodou pokusu a omylu.

Velice užitečné ale bývá oprášit znalosti matematické analýzy a úlohy o hledání extrému funkce více proměnných.

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_1} = 0 \wedge \frac{\partial Q}{\partial \alpha_2} = 0 \wedge \dots \wedge \frac{\partial Q}{\partial \alpha_k} = 0 \quad \longrightarrow \quad \left[a_1, a_2, \dots, a_k\right]$$

Existuje mnoho metod, od „primitivního půlení vícerozměrných intervalů“ až po kombinace analýzy a metod umělé inteligence (expertních systémů). Důležitý je stupeň nelinearity (nelinearita parametrů α_k) a počet parametrů. MATLAB i MAPLE mají pro tyto úlohy předpřipravené příkazy.

Vyrovnání naměřených dat

- Elongace aorty

$$Q(\mu, J_m) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sigma_{zz,i}^{EXP} - \sigma_{zz,i}^{MOD}(\mu, J_m) \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sigma_{zz,i}^{EXP} - \frac{\mu J_m \left(\lambda_{zZ,i}^2 - \dfrac{1}{\lambda_{zZ,i}} \right)}{J_m - \left(\lambda_{zZ,i}^2 + \dfrac{2}{\lambda_{zZ,i}} - 3 \right)} \right)^2$$

Jedná se v naší úloze o lineární nebo nelineární problém?

Je zjevné, že úloha je lineární v μ (tak jak je v něm lineární předpis pro W) a nelineární (racionální výrazy) v J_m.

Vyrovnání naměřených dat

- Elongace aorty

Pokud jste si již sami neurčili, zde je vektor pozorovaných napětí určených ze vztahu: $\lambda_{zZ} F/S$, kde $S = obvod \cdot tloušťka$

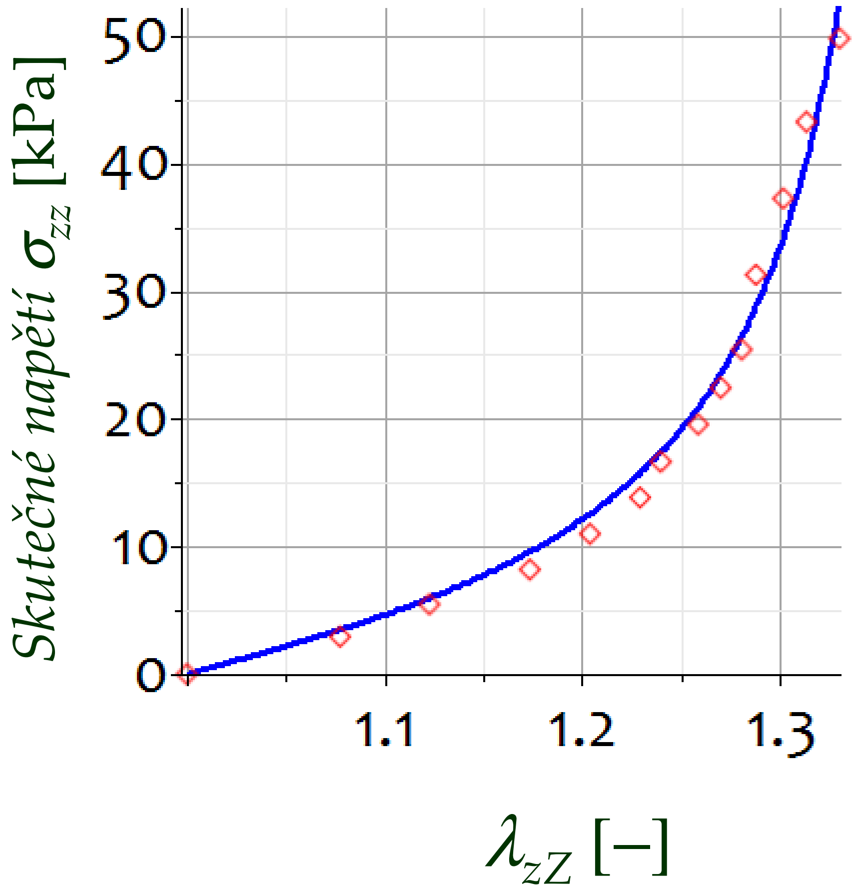
sigma
kPa
0.000
2.938
5.474
8.196
10.996
13.844
16.652
19.582
22.438
25.405
31.268
37.256
43.260
49.806

Vyrovnání naměřených dat

- Elongace aorty

Sestavením funkce Q a využitím příkazu *NLPSolve* s počátečním odhadem J_m = 0.5 a μ = 10 kPa dostaneme (blízké počáteční odhady, zvláště při použití Newtonovy metody, bývají velice užitečné – takové odhady ovšem nelze stanovit bez dobrého fyzikálního porozumění problému):

J_m = 0.3778 a μ = 14.30 kPa



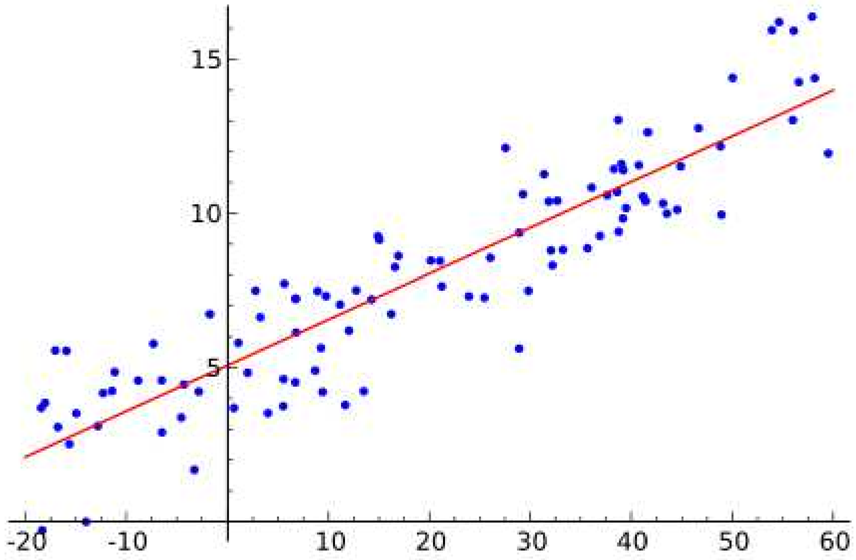
Vyrovnání naměřených dat

- Ohodnocení úspěšnosti regrese

Jde-li o lineární problém, bývá nejčastěji využíván výběrový *lineární koeficient korelace R*.

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{(n-1)S_x S_y}$$

$$R \in [-1;1]$$

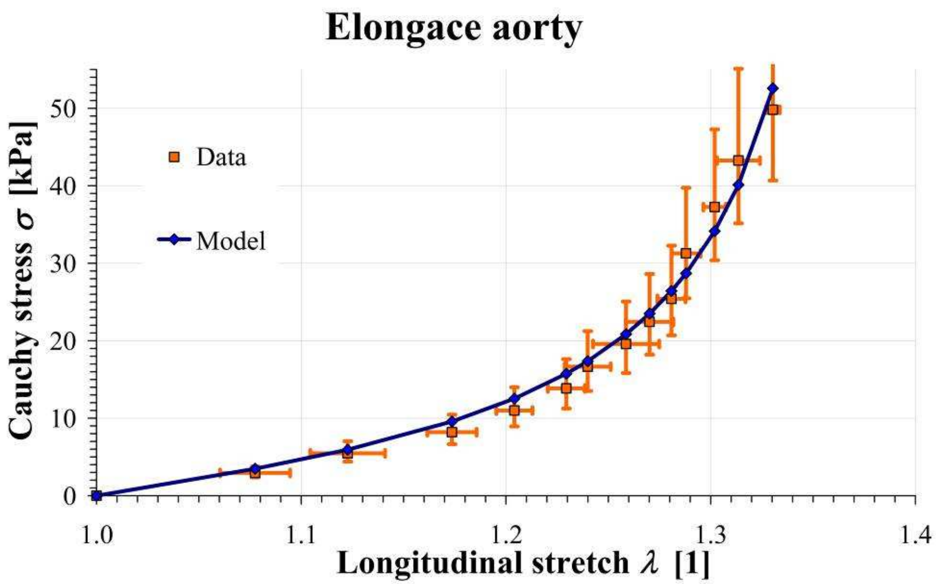


Vyrovnání naměřených dat

- Ohodnocení úspěšnosti regrese

Pro nelineární problém bývá nejčastěji využíván *koeficient determinace*.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(f_i^{EXP} - f_i^{MOD}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(f_i^{EXP} - \overline{f}_i^{EXP}\right)^2}$$



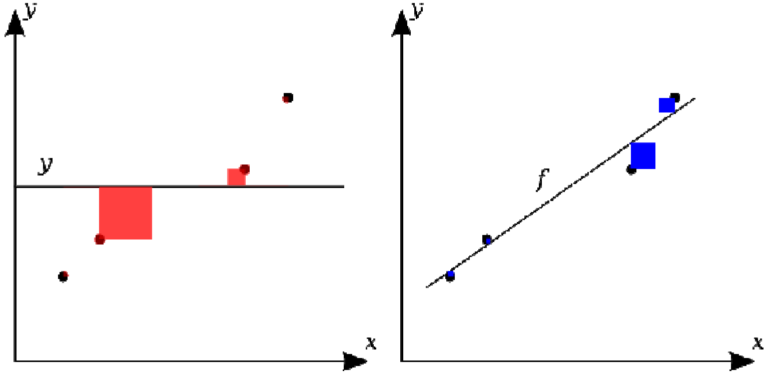
Ten poměřuje „modelem nevysvětlený rozptyl“ (residuální součet čtverců) celkovým rozptylem. Kdyby byla všechna variance pozorování vysvětlena modelem, nabyl by hodnoty 1.

$$R^2 = 0.985$$

Vyrovnání naměřených dat

- Ohodnocení úspěšnosti regrese

Všechno, co lze o výsledku regrese usuzovat, je obsaženo v datech.



Základem hodnocení je vždy analýza reziduí.

http://staff.utia.cas.cz/novovic/files/skmain.pdf

most.ujep.cz/~popelka/Statistika2011_7.pptx

http://home.zcu.cz/~sediva/pse/pse_pr12.pdf